TD 10 : Ensembles

Dans tout ce TD, E est un ensemble quelconque.

Écriture des ensembles

1 ★★☆ On note $A = \left\{ x - \frac{1}{x} \;\middle|\; x \in [1, +\infty[\right\}$. Montrer que $A = \mathbb{R}_+$.

2 ★★ Montrer que les ensembles suivants sont égaux :

$$A = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 3x - y = -1 \right\}$$
$$B = \left\{ (t+1, 4+3t) \;\middle|\; t \in \mathbb{R} \right\}$$

3 ★★ Montrer que les ensembles suivants sont égaux :

$$A = \left\{ \frac{u}{\overline{u}} \;\middle|\; u \in \mathbb{C}^* \right\} \text{ et } B = \mathbb{U}$$

4 ★★★ On pose

$$A = \left\{ z + \overline{z} \;\middle|\; |z| = 1 \right\}$$
$$B = [-2, 2]$$
$$C = \left\{ u + v \;\middle|\; u, v \in \mathbb{C},\ uv = 1 \text{ et } |u| = |v| \right\}$$

1) Montrer que $A \subset B$.
2) Montrer que $B \subset C$.
3) Montrer que $C \subset A$.
4) Que peut-on en déduire sur A, B et C ?

Ensembles et logique

5 ★ Soit F un sous-ensemble de E et P un prédicat défini sur E. Compléter les lignes ci-dessous par $\Longrightarrow$ ou $\Longleftarrow$ selon ce qui est approprié :

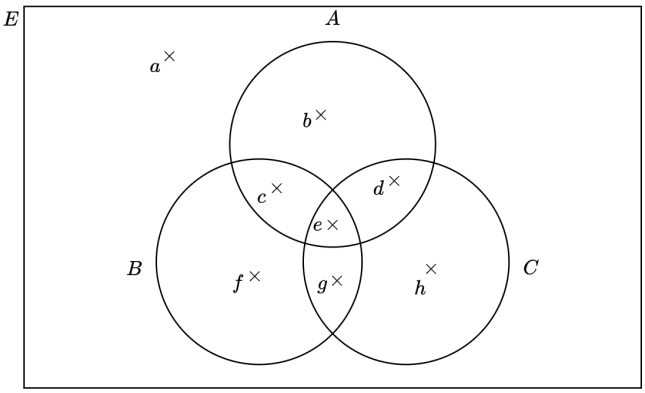
$$\forall x \in E \quad P(x) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \forall x \in F \quad P(x)$$
$$\exists x \in E \quad P(x) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \exists x \in F \quad P(x)$$

6 ★★ Soit F un sous-ensemble de E et P un prédicat défini sur E. Donner toutes les implications qui sont valides entre les assertions A, B, C, D suivantes :

$$A : \quad \forall x \in E \quad \exists y \in E \quad P(x,y)$$
$$B : \quad \forall x \in E \quad \exists y \in F \quad P(x,y)$$
$$C : \quad \forall x \in F \quad \exists y \in E \quad P(x,y)$$
$$D : \quad \forall x \in F \quad \exists y \in F \quad P(x,y)$$

Opérations sur les ensembles

7 ★★☆ On considère un ensemble E à 8 éléments dénotés a, b, c, d, e, f, g, h. On définit A, B et C trois sous-ensembles de E selon le schéma ci-dessous :



1) Déterminer les ensembles $A \cap C$ et $B \setminus (A \cup C)$.
2) En les écrivant différemment avec les lois de Morgan, déterminer les ensembles $\overline{A} \cup \overline{B}$ et $\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}$.
3) Donner une partition de A en quatre ensembles, qu'on exprimera en fonction de A, B et C (ou de leurs complémentaires).
4) Écrire l'ensemble $\{c, d, g\}$ en fonction de A, B et C (ou de leurs complémentaires).

8 ★★ Montrer les équivalences suivantes (attention, c'est long !) :

$$A = B \iff A \cup B = A \cap B$$

$$A \cup B = B \cap C \iff A \subset B \subset C$$

9 ★★ Simplifier les ensembles suivants :

1) $A = \bigcup_{n=1}^{+\infty}]-n, n[$
2) $B = \bigcap_{n=1}^{+\infty} \left[\frac{1}{n}, n \right]$
3) $C = \bigcap_{n=1}^{+\infty} \left] 0, 1 + \frac{1}{n} \right[$

Ensemble $\mathscr{P}(E)$

10 ★★☆ Que vaut $\mathscr{P}(\mathscr{P}(\{1\}))$?

11 ★★ Soit A et B deux parties d'un ensemble E. Déterminer si les assertions suivantes sont vraies ou fausses :

1) $\mathscr{P}(A\cap B)\subset\mathscr{P}(A)\cap\mathscr{P}(B)$
2) $\mathscr{P}(A\cap B)\supset\mathscr{P}(A)\cap\mathscr{P}(B)$
3) $\mathscr{P}(A\cup B)\subset\mathscr{P}(A)\cup\mathscr{P}(B)$
4) $\mathscr{P}(A\cup B)\supset\mathscr{P}(A)\cup\mathscr{P}(B)$

12 ★★★ Soit E un ensemble et $A,B\in\mathscr{P}(E)$. Résoudre les équations suivantes, d'inconnue $X\in\mathscr{P}(E)$:

1. $A\cup X=B$
2. $A\cap X=B$